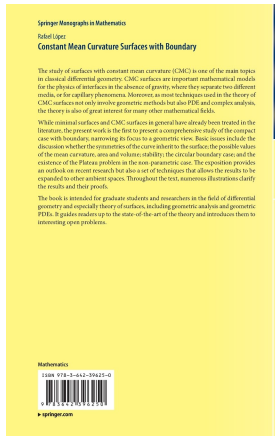
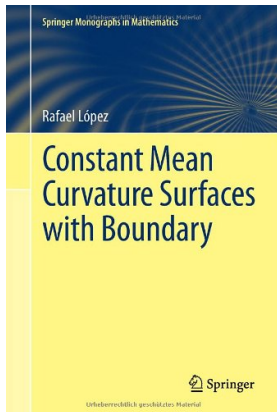
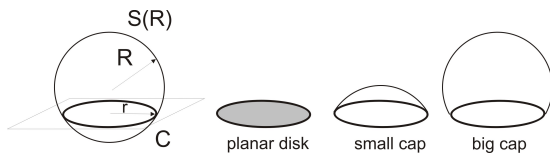


~~Fantastic~~ Soap bubble and soap experiments and where to find them

Fantastic Soap bubble and soap experiments and where to find them



What are the soap bubbles spanning a **circle**?

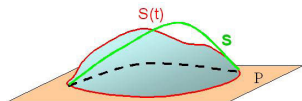


Solutions of a variational problem

Given a closed curve C ...

Problem 1. Find the surface of least area spanning C .

Problem 2. Find the surface of least area spanning C enclosing a given volumen.



Problem 1. $A'(0) = 0$ for any variation $\Leftrightarrow H = 0$: NO blow

Problem 2. $A'(0) + \lambda V'(0) = 0$ for any variation $\Leftrightarrow H = c$: YES blow

The Plateau problem:

Given a closed curve C , find a minimal surface spanning C .

Theorem (Douglas-Radó)

There exists a disk minimal surface spanning any given closed curve.

Sophie Germain (1831) coined the word *mean curvature*

1. *Mémoire S. Germain, sur la courbure des surfaces.*

1

1.

Mémoire sur la courbure des surfaces.

(Par M^{lle} Sophie Germain à Paris.)

Observations préliminaires.

Les surfaces ont été l'objet d'un grand nombre de travaux, et cependant, si l'on cherche à pressentir quel obstacle pourroit, à la première vue décourager le lecteur, on est moins frappé de l'espèce de satiété qui s'attache au sujet que de la trop grande nouveauté de l'aspect sous lequel on a cru devoir l'envisager.

On se propose, en effet, dans ce mémoire, de signaler et de définir un genre de quantités dont l'existence ne paroît pas avoir été soupçonnée; et, en traitant une matière qui semble épuisée, on sera forcé de recourir à des distinctions inusitées, à des notions singulières en apparence. Sans doute, il est à craindre que de telles recherches qui n'auront ni l'appui d'un nom célèbre, ni, malgré tous mes soins, le secours d'une exposition lumineuse soient faiblement accueillies; le moindre degré d'attention suffiroit cependant pour reconnoître que ces distinctions sont fondées, et que ces notions résultent du point de vue sous lequel la courbure des surfaces se présente dans de certaines questions. Ainsi lorsque la courbure entre en comparaison avec des quantités dynamiques, on ne peut se dissimuler qu'elle est tacitement traitée comme une quantité du même genre. Les surfaces ne sont donc plus considérées par rapport à elles seules, et il ne s'agit pas de leurs propriétés particulières, ni de celles qui sont communes à une classe d'entr'elles. Ce dont il s'agit alors c'est de définir la quantité dynamique née de la courbure. Or cette quantité se détermine par la formule

§. 2.

Distribution de la courbure linéaire autour de chacun des points de la surface.

1. Quelle que soit la diversité des surfaces, les courbures linéaires produites par l'intersection du plan normal qui prendroit successivement toutes les positions possibles autour d'un point donné, offrira toujours le même arrangement symétrique.

Cet arrangement constitue ce que nous nommerons dorénavant : loi de distribution de la courbure autour de chacun des points de la surface.

On a pu remarquer que la courbure contenue dans les plans moyens joue, par rapport à toutes les autres, le rôle d'une moyenne.

La dénomination de **courbure moyenne** convient donc ici à aussi juste titre que celle de courbures principales, imposée depuis longtemps à la plus grande et à la moindre des courbures linéaires réparties autour d'un des points de la surface. Il est, en effet, également nécessaire, de distinguer, parmi tant de courbures diverses, celles qui, entre toutes les autres, jouissent de propriétés qui leur sont particulières.

La loi qui nous occupe se compose des propositions suivantes, dont les équations démontrées d'avance dans le paragraphe précédent, doivent être regardées comme l'expression analytique.

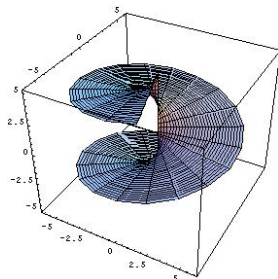
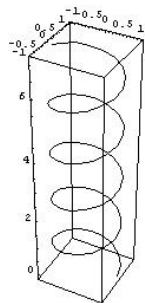
Première proposition. Quelle que soit d'ailleurs la position de deux plans normaux, perpendiculaires entr'eux, menés par un point donné de la surface, la somme des courbures contenues dans ces deux plans sera toujours la même; par conséquent, cette somme sera égale à celle des courbures principales.

Ruled minimal surface: the helicoid

Theorem (Catalan)

Helicoid (and plane) is the only ruled minimal surface

$(s, t) \mapsto$ circular helix + t horizontal line



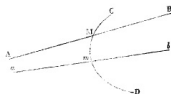
SUR

LES SURFACES RÉGLÉES DONT L'AIRE EST UN MINIMUM;

PAR E. CATALAN.

PROBLÈME. *Quelles sont, parmi les surfaces réglées, celles dont l'aire est un minimum, ou (ce qui revient au même) dont les deux rayons de courbure principaux sont, en chaque point, égaux entre eux et de signes contraires?*

1. Soit ab une position quelconque de la génératrice rectiligne. Me-



nons, par le point m , un plan perpendiculaire à ab : ce plan, normal à la surface, la coupera suivant une courbe CD .

La somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires doit être nulle; par suite, le rayon de courbure de la section CD , au point m , doit être infini.

Nous chercherons donc la valeur du rayon de courbure pour un point quelconque M de CD , et nous exprimerons que ce rayon devient infini quand le point M coïncide avec m .

2. Soient X, Y, Z les coordonnées de M , et x, y, z celles de m . En

26..

Ainsi, toutes les génératrices sont parallèles à un même plan directeur. Prenons ce plan pour celui des xz : les constantes g et h devront être nulles, d'après l'équation précédente. En même temps, nous pouvons déplacer l'origine de manière à faire évanouir les constantes arbitraires D , E et F . Les équations (26) et (27) deviendront donc, à cause de

$$m = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 :$$

$$x - az = 0, \quad y = -C \operatorname{arc} \operatorname{tang} a;$$

d'où

$$y = -C \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{x}{z}.$$

16. Cette dernière équation représente un hélicoïde à plan directeur. Ainsi : *L'hélicoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée qui ait, en chaque point, ses deux rayons principaux, égaux et de signes contraires.*

27..

Solutions of the Björling problem

Problem (Björling 1844)

Given a curve α and a unit normal V along α , find a minimal surface containing α with normal V along α .

$$X(u, v) = X(z) = \Re \left(\alpha(z) - i \int^z V(w) \times \alpha'(w) dw \right)$$

where $\alpha, V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $I = I \times \{0\} \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, Ω simply-connected.

unique with $\alpha = X(u, 0)$. (Schwarz, 1890)



F. G. Björling.
©Spektrum, B. Schöner, München, Völskel

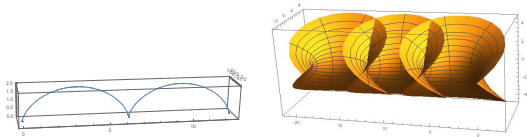


Uniqueness \Rightarrow

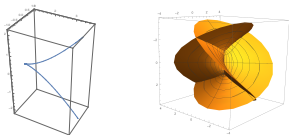
- 1 If $L \subset S$ is a straight-line $\Rightarrow S$ is symmetric about L .
- 2 If S meets orthogonally a plane $P \Rightarrow S$ is symmetric about P .

Procedure: calculate the integral \rightsquigarrow replace z by $u + \mathbf{i}v$ \rightsquigarrow take real parts

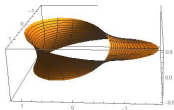
- ① Catalan: $\alpha(t) = (1 - \cos(t), 0, t - \sin(t))$, $V(t) = \mathbf{n}(t)$

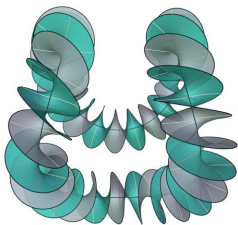
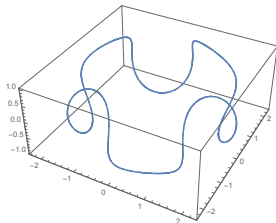
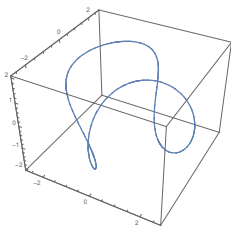


- ② Henneberg: $\alpha(t) = (\cosh(2t), 0, \sinh(t) + \frac{1}{3} \sinh(3t))$, $V(t) = \mathbf{n}(t)$



- ③ Minimal Möbius strip (Meeks): $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$,
 $V(t) = \cos(t/2)\mathbf{n}(t) + \sin(t/2)\mathbf{b}(t)$.

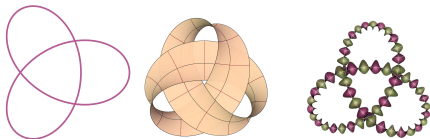




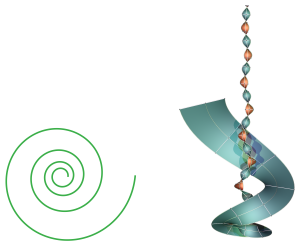
 (–, M. Weber), Michigan Math. J. (2018) ✓

1 Trefoil curves

$$\xi = \frac{1}{4} : \quad \alpha(t) = ((\cos(t) - \xi) \cos(t), (\cos(t) + \xi) \sin(t)) ,$$



2 Logarithmic spiral: $\alpha(t) = e^t(\cos(t), \sin(t))$

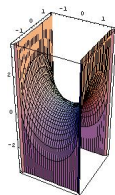
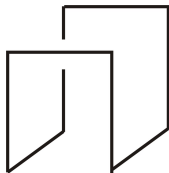


The Scherk surface

Problem: minimal surfaces parametrized by $z = f(x) + g(y)$.

$$X(x, y) = (x, y, f(x) + g(y)) = (x, 0, f(x)) + (0, y, g(y))$$

$$z(x, y) = \log(\cos(y)) - \log(\cos(x)) = \log \frac{\cos(y)}{\cos(x)}$$



A **translation surface** is a surface parametrized by $X(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$.

PROBLEM: *classify all minimal surfaces of translation type*

 (–, O. Perdomo), J. Geom. Anal. (2017) ✓

 (T. Hasanis, –), (2019) ✓

$K = ct \Rightarrow K = 0$ and the surface is cylindrical (α is a straight-line)

 (–, M. Moruz), J. Korean Math. (2015) ✓

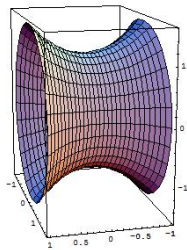
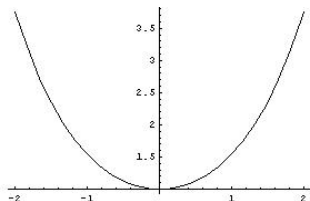
 (T. Hasanis, –), Comm. Anal. Geom. (2019) ✓

Rotational cmc surfaces

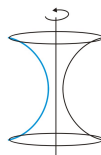
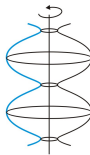
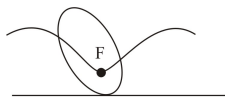
Theorem (Meusnier, Riemann)

The catenoid is the only rotational minimal surface.

$$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

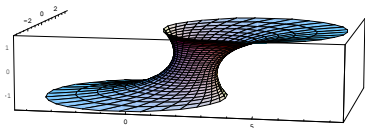


Rotational surfaces with $H = ct$ (Delaunay surfaces)

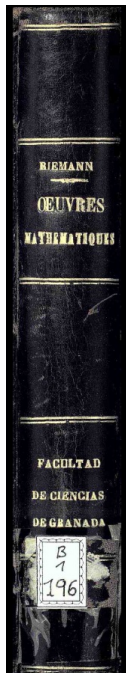


Riemann minimal examples

Minimal surfaces constructed by circles in parallel planes



$$X(u, \theta) = \left(\int^u \frac{\lambda t^2 dt}{\sqrt{\lambda^2 t^4 + 2\mu t^2 - 1}}, 0, \int^u \frac{dt}{\sqrt{\lambda^2 t^4 + 2\mu t^2 - 1}} \right) + u(\cos \theta, \sin \theta, 0).$$



Lorsque sur la surface minima on décrit dans le voisinage d'un de ces quatre points un chemin conduisant d'une des lignes de contour à la suivante, l'argument de dt varie de π . On peut donc, comme au § XIII, poser de même ici

$$\frac{du}{dt} = \frac{C_2}{\sqrt{(t^2-1)(t+1)}},$$

et C_2^2 doit être imaginaire pure, afin que du^2 soit réel sur le contour. On trouve

$$C_2 = \sqrt[3]{2} C_1^2 l.$$

Cette expression coïncide avec celle précédemment établie pour $\left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2$. Pour simplifier encore posons

$$\left(\frac{t^2-1}{t+1}\right)^2 = \omega^2, \quad \eta^2 + \eta^{-2} = 2\lambda,$$

et remarquons que

$$\left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 d \log \eta = \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \frac{dt}{d \log \eta} dt.$$

Alors un calcul très simple donne

$$(i) \begin{cases} X = -i \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 d \log \eta & = C \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\rho^2\omega)}}, \\ Y = -\frac{i}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta & = C \rho^2 \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\rho^2\omega)}}, \\ Z = -\frac{i}{2} \int \left(\frac{du}{d \log \eta}\right)^2 \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) d \log \eta & = C \rho \int \frac{d\omega}{\sqrt{\omega(1-\omega)(1-\rho\omega)}}, \end{cases}$$

où $\rho = -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$ désigne une racine cubique de l'unité. La constante réelle $C = \frac{1}{2} C_1$, sera déterminée par la longueur donnée des arêtes du tétraèdre.

§ XIX.

Pour terminer, nous traiterons encore le problème de surface minima pour le cas où l'encadrement est formé par deux circonférences quelconques situées sur des plans parallèles. Ici l'on ne

connait donc pas la direction des normales au contour, et l'on ne peut donc en opérer la représentation sur la sphère. Mais on arrive à la solution du problème en faisant l'hypothèse que toutes les sections planes, parallèles aux plans des deux circonférences d'encadrement, sont également des circonférences. On démontrera que, sous cette hypothèse, la condition du minimum peut être satisfaite.

Si l'on prend l'axe des x perpendiculaire aux plans des circonférences de contour, l'équation de la courbe d'intersection déterminée par un plan qui leur est parallèle sera

$$(K) \quad F = y^2 + z^2 + 2\alpha y + 2\beta z + \gamma = 0,$$

et il s'agit alors de déterminer α , β , γ comme fonctions de x . Posons, pour abrégér,

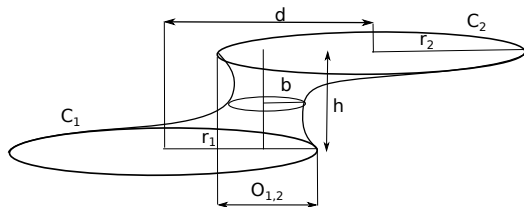
$$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{n},$$

en sorte que

$$\cos r = n \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \sin r \cos \varphi = n \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \sin r \sin \varphi = n \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Alors la condition du minimum peut se mettre sous la forme

$$\frac{\partial \left(n \frac{\partial F}{\partial x} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(n \frac{\partial F}{\partial y} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(n \frac{\partial F}{\partial z} \right)}{\partial z} = 0,$$










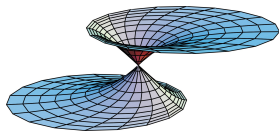
$$O_{1,2} \rightarrow 0?$$

$$O_{1,2} > (\sqrt{2} - 1)h$$

 (-), Annali Mat. Pura. App. (2017) ✓

In other ambient spaces, \mathbb{L}^3 , $H = 0$, $H = c$.

-  (-) Diff. Geom. Appl. (1999) ✓
-  (-) Geom. Dedicata, (1999) ✓
-  (F. López, -, R. Souam) Michigan Math. J. (2000), ✓
-  (-) Mon. Math. (2008) ✓
-  (O. Boyacioglu, -, D. Saglam) Taiwanese J. Math. (2011) ✓
-  (-, A. Nistor), Results Math. (2013) ✓
-  (S. Kaya, -), Proceedings of the conference M:IV, to appear ✓



Annals of Mathematics, **155** (2002), 459–489

Proof of the Double Bubble Conjecture

By MICHAEL HUTCHINGS, FRANK MORGAN, MANUEL RITORÉ, and ANTONIO ROS*

Abstract

We prove that the standard double bubble provides the least-area way to enclose and separate two regions of prescribed volume in \mathbb{R}^3 .

Conjecture:

Spherical caps are the only compact CMC surfaces spanning S^1

- 1 topological disk.
- 2 without self-intersections.
- 3 stable.

(1)+(3) \Rightarrow yes!

PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 127, Number 4, April 1999, Pages 1195–1200
S 0002-9939(99)04950-3

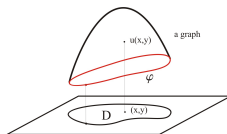
STABLE CONSTANT MEAN CURVATURE SURFACES WITH CIRCULAR BOUNDARY

LUIS J. ALÍAS, RAFAEL LÓPEZ, AND BENNETT PALMER

Theorem 1. *Let D denote the unit disc in the complex plane and let $X : D \rightarrow \mathbf{R}^3$ be a conformal immersion with constant mean curvature h . Assume X is stable and that $X(\partial D) \subset S^1$. Then $X(D)$ is a spherical cap of radius $1/|h|$. (The case $h = 0$ corresponds to a flat disc.)*

The Dirichlet problem

Given a domain $D \subset \mathbb{R}^2$, $H \in \mathbb{R}$ and φ a continuous function on $\partial\Omega$, :
Does a graph exist on Ω , with constant mean curvature H and boundary values φ ?



$$\operatorname{div} \frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} = 2H \text{ on } \Omega$$
$$u = \varphi \text{ along } \partial\Omega$$

Theorem (Serrin)

If $\kappa_D \geq 0$, there exists a solution for any φ if and only if $2H \geq \kappa$.

$$\begin{cases} H = \text{constant} & \text{in } D \\ u = 0 & \text{along } \partial D \end{cases}$$

If D is a **convex** domain...

- 1 $H > \kappa$.
- 2 $\text{length}(\partial D) < \frac{\sqrt{3}\pi}{H}$.
- 3 $\text{area}(D) < \frac{\pi}{2H^2}$.
- 4 $\text{diam}(D) < \frac{1}{H}$.

 (–, S. Montiel), Duke Math. J. (1996) ✓

 (–), J. Differ. Eq.(2001) ✓

 (–), Glasgow Math. J. (2002) ✓

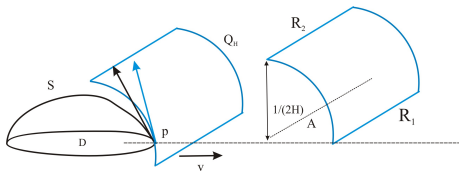
$\exists M$ independent on $t \in \mathcal{A}$:

$$\|u_t\|_{C^1(\bar{\Omega})} = \sup_{\Omega} |u_t| + \sup_{\Omega} |Du_t| \leq M.$$

Theorem

If D is convex and $L(\partial D) < \sqrt{3}\pi/H^2$, there is a solution with $u = 0$.

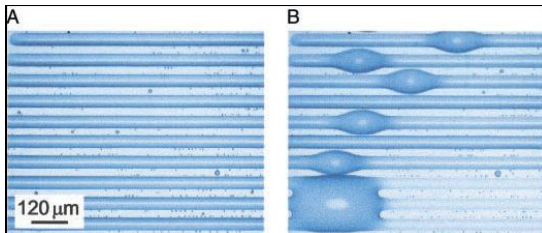
$$L < \frac{\sqrt{3}\pi}{H^2} \rightsquigarrow h < \frac{1}{2H} - \epsilon.$$



A bifurcation problem



Max Planck Institute of Colloids and Interfaces (Potsdam, Germany)



Theorem

A cylinder confined in a strip with contact angle $\gamma \in (\pi/2, \pi)$ bifurcates in a family of non-rotational CMC surfaces with the same boundary. The new surfaces are periodic along the strip.

 (–), Siam J. Math. Anal. (2014) ✓

 (–), Siam J. Appl. Math. (2017) ✓

 (–), Mathematics for Industry, vol. 25, The Role and Importance of Mathematics in Innovation, Springer, 2016, ✓

Theorem (Vogel, Athanasseas)

Hemisphere is the only stable CMC surface over a plane.

Cylinder is the only stable CMC surface between two parallel planes.

Theorem (2014)

Part of a sphere is the only stable CMC surface in a wedge.

Advances in Mathematics 262 (2014) 476–483



Contents lists available at [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

Advances in Mathematics

www.elsevier.com/locate/aim

Capillary surfaces with free boundary in a wedge

Rafael López¹

Theorem 1.1. *Let $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a stable capillary compact surface with free boundary in a wedge W . Then $\phi(M)$ describes part of a sphere centered at the vertex.*

THANKS FOR YOUR ATTENTION!