Допълнение А

А.1 Елиптични интеграли и функции

Елиптичните интеграли и функции са математични обекти, които в наши дни често се пропускат в учебните програми по математика в университетите. Едно тривиално обяснение е наличието на изобилие от ефикасни изчислителни схеми които могат да бъдат реализирани на съвременните компютри. Докато стандартната техника за интегриране ни позволява да получим явни изрази (в термините на тригонометрични, експоненциални и логаритмични функции) за всеки интеграл от вида

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{P(x)})\mathrm{d}x$$

където $\mathcal{R}(x, \sqrt{P(x)})$ е рационална функция, а $P(x)$ е линеен или квадратичен полином, то ние следва да разширим нашия речник от "елементарни" функции ако искаме да работим с полиноми от по-висока степен. В частност когато $P(x)$ е полином от трета или от четвърта степен, съответната функция се нарича **елиптична**. Разбира се, когато се преподава математически анализ, трябва да се спре някъде и не изглежда неразумно просто да останем верни на познатите ни линейни и квадратични функции, докато за да пресметнем интегралите от трета и четвърта степен да използваме числени методи. Възможностите на лесните за използване компютърни системи за символни пресмятания от типа на *Maple*® и `Mathematica`® прави този начин на действие дори по-разбираем.

Основният момент в настоящото допълнение е, че елиптичните функции осигуряват ефективно средство за описание на геометричните обекти. Друг момент, който се надяваме, че е достатъчно добре илюстриран в основният текст е, че споменатите по-горе компютърни програми, чрез техните вградени средства за изчисляване и визуализация са фактически реална мотивировка за преподаване и използване на елиптичните функции.

В допълнението, което следва ще се спрем главно на няколко примера за да се убедим, че елиптичните интеграли и функции са необходим инструментариум за получаването на интересна геометрична и механична информация надхвърляща значително тази, която дават директните числени пресмятания. Историята на развитието на елиптичните функции може да бъде проследена в Stillwell [1989]. Ясно изложение на техните свойства и приложения може да бъде намерено в книгите на Greenhill [1959], Hancock [1958], Bowman [1953], Гурвиц [1933], Ахиезер [1970] и Lawden [1989]. Един съвременен подход към проблема от гледна точка на динамичните системи е даден от Meyer [2001].

A.2 Елиптични функции на Jacobi

Най-лесният начин за въвеждане на елиптичните функции е да ги разгледаме като аналог на обикновените тригонометрични функции. От курса по анализ знаем, че

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Разбира се, ако $x = \sin(t)$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2)$, ще имаме

$$t = \arcsin(\sin(t)) = \int_0^{\sin(t)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}. \tag{A.1}$$

В този случай можем да гледаме на $\sin(t)$ като функция обратна на интеграла (A.1). Разбира се, реалното разбиране на тригонометричните функции включва познаване на техните графики, връзката им с другите тригонометрични функции като $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ и разбира се фундаменталните геометрични и физически примери в които те се появяват (например окръжности и периодични движения). Ние ще следваме този пример и за елиптичните функции. Ако фиксираме едно реално число k за което е изпълнено $0 \le k \le 1$ и което оттук нататък ще наричаме **елиптичен модул** то можем да дадем следната

Дефиниция A.1. Синус функция *на* **Jacobi** $\operatorname{sn}(u,k)$ *е функцията обратна на интеграла*

$$u = \int_0^{\operatorname{sn}(u,k)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}. \tag{A.2}$$

По-общо, ще наричаме

$$F(z,k) = \int_0^{z} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}. \tag{A.3}$$

елиптичен интеграл от първи род. **Елиптичните интеграли от втори и трети род** ще дефинираме чрез равенствата

$$\begin{aligned} E(z,k) &= \int_0^{z} \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ \Pi(n,z,k) &= \int_0^{z} \frac{\mathrm{d}t}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t)}}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Когато аргумента z в $F(z,k), E(z,k)$ и $\Pi(n,z,k)$ е единица, тези интеграли се означават съответно с $K(k), E(k)$ и $\Pi(n,k)$ и се наричат **пълни** елиптични интеграли от първи, втори и трети род.

Ако положим $t = \sin\phi$ горепосочените интеграли се трансформират съответно в

$$\begin{aligned} F(\phi,k) &= \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \\ E(\phi,k) &= \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\mathrm{d}\phi \\ \Pi(n,\phi,k) &= \int_0^{\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{(1+n\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Ще отбележим, че при $k \equiv 1$, $E(\phi,1) = \sin\phi$ и следователно $E(\phi,k)$ може да се разглежда като обобщение на функцията $\sin\phi$.

Косинус функцията на **Jacobi** $\operatorname{cn}(u,k)$ може да бъде дефинирана чрез $\operatorname{sn}(u,k)$ и тъждеството

$$\operatorname{sn}^2(u,k) + \operatorname{cn}^2(u,k) = 1. \tag{A.6}$$

Третата елиптична функция на Jacobi $\operatorname{dn}(u,k)$ е определена от равенството

$$\mathrm{dn}^2(u,k) + k^2\ \mathrm{sn}^2(u,k) = 1. \tag{A.7}$$

От дефиницията на $\mathrm{sn}(u,k)$ е ясно, че $\mathrm{sn}(u,0) = \sin(u)$. Разбира се, при тази ситуация имаме и $\mathrm{cn}(u,0) = \cos(u)$.

Производните на елиптичните функции могат да бъдат определени от дефинициите (или обратно както е в Meyer [2001] където елиптичните функции по същество са дефинирани чрез техните производни). Например, нека изчислим производната на $\mathrm{sn}(u,k)$. В (A.3) се предполага, че $z = z(u)$. Тогава

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}.$$

Но от (A.2) и (A.3) е ясно знаем, че когато $z = \mathrm{sn}(u,k)$, то $F(z,k) = u$. Оттук, замествайки z със $\mathrm{sn}(u,k)$ и използвайки $\mathrm{d}u/\mathrm{d}u = 1$, получаваме

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{sn}(u,k)^2}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}(u,k)^2}}\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{d}u}\\
\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{d}u} &= \sqrt{1-\mathrm{sn}(u,k)^2}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}(u,k)^2} \qquad \text{(A.8)}\\
\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{sn}(u,k)}{\mathrm{d}u} &= \mathrm{cn}(u,k)\ \mathrm{dn}(u,k).
\end{aligned}$$

След диференциране на (A.6) по отношение на u и като вземем под внимание (A.8) получаваме

$$\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{cn}(u,k)}{\mathrm{d}u} = -\,\mathrm{sn}(u,k)\ \mathrm{dn}(u,k) \tag{A.9}$$

а диференцирането на (A.7) и отново (A.8) ни дават

$$\frac{\mathrm{d}\ \mathrm{dn}(u,k)}{\mathrm{d}u} = -k^2\,\mathrm{sn}(u,k)\ \mathrm{cn}(u,k). \tag{A.10}$$

Алгебричните компютърни програми като *Maple*® или `Mathematica`® имат вградени модули за работа с елиптични функции, така че те могат да бъдат лесно начертани. Графиките на елиптичния синус sn, косинус cn и функцията dn са показани на фиг. A.1. На нея се вижда, че $\mathrm{sn}(u,k)$ и $\mathrm{cn}(u,k)$ са периодични. Периода им можем да определим като се позовем директно на дефинициите дадени по-горе (вж. по-специално(A.2))

$$K(k) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}.$$