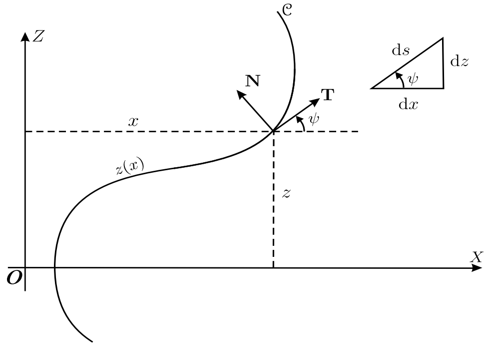
Глава 1

Геометрия и вариационно смятане

1.1 Равнинни криви

От различните координатни системи използвани за представянето на равнинните криви, ние ще се спрем само на две, които ще бъдат използвани в по-нататъшните ни разглеждания. Това са параметричните представяния при използване на Декартова координатна система и полярното представяне. Координатните оси на Декартовата координатна система са двойка перпендикулярни прави, абсциса (оста OX) и ордината (оста OZ) - вж. фиг. 1.1.



Фигура 1.1: Геометрия на равнинна крива.

Координатните оси на полярната координатна система се състоят от точка (полюс) и лъч от тази точка. Понататък за полюса и оста на полярната система ще предполагаме, че съвпадат с началото и положителната част на оста OX. В Декартовата координатна система XOZ координатите на кривата $\mathcal{C}$ се задават от двойка независими функции на една реална променлива t във вида

$$\mathbf{x} = (x(t), z(t)), \qquad t \in I = (\mathring{t}, \bar{t}) \subset \mathbb{R}.$$

Функциите $x(t)$ и $z(t)$ формират *регулярно* представяне на кривата (дъгата) $\mathcal{C}$ ако

1) функциите $x(t)$ и $z(t)$ са двукратно непрекъснато диференцируеми

2) За всяко $t \in I$ най-малко една от производните $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ не е нула

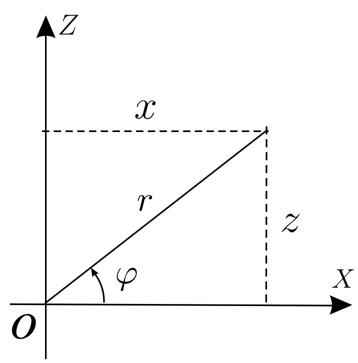
3) за всички точки $\sigma, \tau \in I$

$$(x(\sigma), z(\sigma)) \equiv (x(\tau), z(\tau))$$

е налице, тогава и само тогава когато $\sigma \equiv \tau$

1.1.1 Полярна координатна система

Връзката между полярните (r, φ) и Декартовите (x, z) координати е определена от формулите приведени по-долу



Фигура 1.2: Полярна координатна система.

$$x = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi$$
$$r \in \mathbb{R}^+, \qquad \varphi \in [0, 2\pi) \tag{1.1}$$

а в обратна посока от формулите

$$r = (x^2 + z^2)^{1/2}$$
$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{z}{x}. \tag{1.2}$$

1.1.2 Кривина

Кривата $\mathcal{C}$ се нарича непрекъсната ако дефиниционните уравнения са непрекъснати функции и **алгебрична** ако те са алгебрични, в противен случай се казва, че е **трансцедентна**.

Дължината на дъгата от кривата $\mathcal{C}$ ще бележим с s и ако я изберем за параметър ще имаме

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\mathbf{e_1} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\mathbf{e_2} \tag{1.3}$$

където $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$ са единичните вектори по направление на координатните оси. За скаларният квадрат на вектора от (1.3) можем да запишем

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)^2 \tag{1.4}$$

а поради факта, че всички наши разглеждания са в Евклидовото пространство е налице и равенството

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{1.5}$$

откъдето получаваме

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} = 1. \tag{1.6}$$

Последното уравнение всъщност ни осигурява, че допирателният вектор

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}s} \tag{1.7}$$

е с дължина единица, а параметъра s се нарича **естествен**.

Кривината на една крива $\mathcal{C}$ се дефинира като скоростта на промяна на наклона θ на допирателният вектор $\mathbf{T}$ към абсцисата, т.е.,

$$\kappa(s) = \frac{\mathrm{d}\theta(s)}{\mathrm{d}s}\cdot \tag{1.8}$$

Радиусът на кривината $\mathcal{R}$ е реципрочен на абсолютната стойност на кривината и следователно

$$\mathcal{R} = \frac{1}{|\kappa(s)|} = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right|\cdot \tag{1.9}$$

Тъй като

$$\kappa = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \tag{1.10}$$

то ако използваме за параметър абсцисата x, т.е., $\mathbf{x}(x) = (x, z(x))$ можем да запишем равенствата

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} z'(x)) = \frac{z''(x)}{1+[z'(x)]^2} \tag{1.11}$$

$$\kappa(x) = \frac{z''(x)}{(1+[z'(x)]^2)^{3/2}} \tag{1.12}$$

където сме отчели, че съгласно (1.5)

$$\mathrm{d}s = \left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{1/2} \mathrm{d}x. \tag{1.13}$$

Ако използваме параметрично представяне на кривата имаме съответно

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{z}(t) - \ddot{x}(t)\dot{z}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{z}^2(t))^{3/2}}\cdot \tag{1.14}$$

Ако работим в полярни координати

$$x(\phi) = r(\phi)\cos\phi, \qquad z(\phi) = r(\phi)\sin\phi \tag{1.15}$$

използваме (1.14) и някои елементарни преобразования получаваме като резултат формулата

$$\kappa(\phi) = \frac{r^2 + 2\dot{r}^2 - r\ddot{r}}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}} \tag{1.16}$$

в която

$$r = r(\phi), \qquad \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r(\phi)}{\mathrm{d}\phi} \qquad \text{и} \qquad \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}^2 r(\phi)}{\mathrm{d}\phi^2}\cdot \tag{1.17}$$

Най-накрая, ако кривата $\mathcal{C}$ е зададена с Декартовите си координати x и z чрез уравнението $F(x,z) = 0$, то

$$\kappa(x,z) = \frac{F_{xx}F_z^2 - 2F_{xz}F_xF_z + F_{zz}F_x^2}{(F_x^2 + F_z^2)^{3/2}}{}_{|F\equiv 0}\cdot \tag{1.18}$$